BROJEVNI SISTEMI

Kodiranje i dekodiranje informacija

- Informacije koje računar pamti i obrađuje (podaci i instrukcije) su interno u binarnom obliku tj. matematički posmatrano, u obliku nizova nula i jedinica.
- Tako je najmanja jedinica informacije u računaru jedna nula ili jedna jedinica i naziva se **bit**.
- Fizički, bit se u računaru realizuje preko dva različita električna stanja pomoću odgovarajućih hardverskih elemenata (diode, tranzistori, magnetska jezgra). Tako ako je neki element na višem od dva nivoa napona on realizuje binarno 1, a ako je na nižem nivou napona onda realizuje binarno 0, ili magnetski tok u jednom smeru realizuje 1, a u suprotnom smeru 0. Kažemo da su informacije u računaru binarno kodirane, pa su neophodni odgovarajući hardverski elementi i softver za prevođenje-kodiranje ulaznih informacija iz izvornog (source)oblika ili koda u binarni ili mašinski oblik ili kod (binary code, mashine code), koga razume računar. Naime, korisnik unosi svoj program i podatke u obliku teksta i dekadnih brojeva (izvorni oblik) koji se radi smeštanja u memoriju moraju binarno kodirati. Hardver za binarno kodiranje ulaznih informacija je u sklopu ulazne jedinice.
- Da bi izlazne informacije (napr. rezultati) bile razumljive za korisnika, neophodan je obrnut proces – dekodiranje internih binarnih informacija (u tekst i dekadne brojeve). Hardver za dekodiranje obezbeđuju izlazne jedinice.

ELEMENTI RAČUNARSKE ARITMETIKE

- računar pamti i računa sa brojevima u binarnom brojnom sistemu
- binarni brojni sistem je, kao i nama najbliži dekadni, jedan pozicioni brojni sistem
- za razliku od dekadnog sistema u kome je osnova deset, u binarnom sistemu osnova je dva
- pozicioni označava da vrednost neke cifre zavisi od njenog položaja u broju, na primer u decimalnom broju 345.23 prva trojka vredi tri stotine, a druga tri stota dela.
- Naime 345.23 predstavlja u stvari skraćeni zapis sume

$$3\cdot 10^{2}+4\cdot 10^{1}+5\cdot 10^{0}+2\cdot 10^{-1}+3\cdot 10^{-2}$$

Za neki pozitivan broj:

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \ . \ . \ . \ a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2}$$

decimalna tačka

- u pozicionom brojnom sistemu sa osnovom B (B≥2) gde a_i označava cifru, važi:
- $a_i \in \{0, 1, \ldots B-1\}$

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots = a_n \cdot B^n + a_{n-1} \cdot B^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot B^1 + \\ + a_0 \cdot B^0 + a_{-1} \cdot B^{-1} + a_{-2} \cdot B^{-2} \ldots \qquad (3)$$

- Za dati primer dekadnog broja imaćemo:

$$B = 10; a_2 = 3; a_1 = 4; a_0 = 5; a_{-1} = 2; a_{-2} = 3$$

- Prvo cifarsko mesto sleva (cifra a_n) najviše vredi i nazvaćemo je najznačajnijom, a poslednja cifra je najmanje značajna.

Binarni, oktalni i heksadekadni brojni sistem

- za računarsku aritmetiku, od interesa je binarni brojni sistem
- pri programiranju u mašinskom jeziku i u računarskoj literaturi često se koriste i oktalni (osnova je osam) i heksadekadni brojni sistem (osnova je šesnaest) pomoću kojih se, u stvari skraćeno prikazuju binarni kodovi. Za binarni brojni sistem imamo:
- $B = 2 \quad a_i \in \{0,1\}$
- Za oktalni brojni sistem
- $B=8 \quad a_i \in \{0,1,2,\ldots.7\}$
- Za heksadekadni brojni sistem
- $B = 16 \quad a_i \in \{0,1,2,\ldots 9, A,B,C,D,E,F\}$

Naziv	Osnova	Cifre
Dekadni	10	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
Binarni	2	$0, 1$
Oktalni	8	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$
Heksadekadni	16	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$

- primetite u proizvoljnoj bazi B koristićemo cifre od 0 do B-1.
- slova A-F iz praktičnih razloga zamenjuju cifre: 10-15
- bazu brojnog sistema naznačavaćemo uz pomoć indeksa, na primer:
- 1025_{10} - dekadni broj
- 503.27_{8} - oktalni broj
- $A01.B_{16}$ - heksadekadni broj

Kako prevesti neki broj u nekom drugom brojnom sistemu u dekadni oblik?

- Postupak se sastoji u primeni jednačine (3) i izračunavanju vrednosti sume u dekadnom brojnom sistemu.

- PRIMER 1
- Prevesti sledeće brojeve u dekadni oblik:
- a) 1100100.01_2
- b) 317.5_8
- c) $20AB.4_{16}$

PRIMER 1

a) 1100100.01_2

b) 317.5_8

c) $20AB.4_{16}$

$$a)\ 1100100.01_2 = 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2}$$

$$= 64 + 32 + 4 + 0.25$$

$$= 100.25_{10}$$

$$b)\ 317.5_8 = 3\cdot 8^2 + 1\cdot 8^1 + 7 + 5\cdot 8^{-1} = 207.625_{10}$$

$$c)\ 20AB.4_{16} = 2\cdot 16^3 + 10\cdot 16 + 11 + 4\cdot 16^{-1} = 8363.25_{10}$$

Kako prevesti neki broj iz dekadnog oblika u neki drugi brojni sistem?

- Kako rešiti obrnut problem - iz dekadnog preći u neki drugi brojni sistem?
- Kao ideja se nameće obrnut postupak tj. primena jednačine (3) zdesna ulevo. Na primer:
- $327_{10} = 5 \cdot 64 + 7 = 5 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 507_8$
- Taj postupak je međutim težak za primenu na velike decimalne brojeve pa se koristi sledeći algoritam:
- Postupak se sastoji u uzastopnom deljenju polaznog broja a, osnovom B sistema u koji se broj prevodi. Kada se a podeli sa B dobija se celobrojni rezultat a_1 i ostatak r_1, koji predstavlja najmanje značajnu cifru p_1. Deljenjem rezultata a_1 sa B dobija se a_2 i ostatak r_2 koji predstavlja drugu cifru zdesna ulevo. Postupak se ponavlja sve dok rezultat deljenja ne postane manji od B, i on predstavlja najznačajniju cifru p_n. Kao rezultat dobijamo $a_{10} \rightarrow (p_n, \ldots, p_2, p_1)_B$

PRIMER 2

Broj 335_{10} prevesti u binarni, oktalni i heksadekadni oblik.

335:2

167	i ostatak	1
83	" "	1
41	" "	1
20	" "	1
10	" "	0
5	" "	0
2	" "	1
1	" "	0

$335_{10} = 101001111_2$

335:8

41	7
5	1

$335_{10} = 517_8$

335:16

20	15
1	4

$335_{10} = 14F_{16}$

Prevođenje decimalnih brojeva iz dekadnog u neki drugi brojni sistem

- Prevođenje decimalnih brojeva sastoji se u posebnom prevođenju celobrojnog i decimalnog dela broja. Zato ćemo dati metod za prevođenje pravih razlomaka (decimalan deo nekog broja).
- Postupak se sastoji u uzastopnom množenju decimalnog dela prethodnog rezultata osnovom novog brojnog sistema B. Množenje se prekida kada se pojavi nula kao rezultat ili kada se postigne željena tačnost. Celobrojni delovi dobijenih proizvoda biće redom cifre broja u novom brojnom sistemu.

PRIMER 3

- Broj 0.6875_{10} prevesti u binarni oblik:

0.	6875		$\longrightarrow 0.1011_2$
1.	375	x2=	
0.	75	x2=	
1.	5	x2=	
1.	0	x2=	

- Neki pravi razlomak, koji u obliku decimalnog broja ima u nekom brojnom sistemu konačan broj cifara, u nekom drugom brojnom sistemu može biti beskonačan periodičan decimalan broj.
- Prevedimo, na primer, dekadni broj 0.1 u binarni sistem:

0.	1
0.	2
0.	4
0.	8
1.	6
1.	2
0.	4
0.	8
1.	6
1.	2
.	

$\longrightarrow (0.0\overbrace{0011}\overbrace{0011}\ldots)_2$

- Vidimo da je rezultat beskonačan periodičan decimalan broj.

- U ovakvim slučajevima nemoguć je tačan prelaz iz jednog u drugi brojni sistem već se unapred definiše tačnost, tj. broj decimala rezultata. Pri tom se, radi smenjenja greške, poslednja tražena decimala povećava za jedan, ukoliko je sledeća jednaka ili veća od polovine osnove B - pravilo zaokruživanja.
-
- PRIMER 4
- Broj 0.93_{10} prevesti u oktalni sa tačnošću od 4 decimale:

0.	93	x8 $\longrightarrow$	0.7341_8
7.	44		
3.	52		
4.	16		
1.	28		
2.	24		

- Pošto je peta decimala (2) manja od 4, po pravilu zaokruživanja četvrta poslednja tražena decimala rezultata ostaje nepromenjena.

- Neki decimalni broj koji je veći od 1 tj. ima i celobrojni deo, prevodi se u drugi brojni sistem tako što se posebno prevodi celobrojni deo a posebno decimalni, opisanim postupcima.
-
- PRIMER 5
- Broj 173.93_{10} prevesti u oktalni sistem sa tačnošću od četiri decimale.

$\underline{173:8}$	
21	5
2	5

$173_{10} = 255_8$

- U prethodnom primeru smo izračunali 0.9310≈0.73418, pa konačno imamo 173.9310≈255.73418

Prevođenje između binarnog, oktalnog i heksadekadnog brojnog sistema

- Između binarnog i oktalnog brojnog sistema postoji specijalan odnos jer je:
- $8 = 2^3$
- Slično, za osnove heksadekadnog i binarnog sistema važi:
- $16 = 2^4$
- Osobina, da je osnova jednog brojnog sistema jednaka celobrojnom stepenu osnove drugog brojnog sistema omogućuje brz prelaz iz jednog u drugi sistem.

- Neka, na primer, treba oktalni broj 317_8 prevesti u binarni. Počećemo od jednačine (3):
- $317_8 = 3 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0$
- Svaku od cifara oktalnog broja možemo da prevedemo u trocifreni binarni broj (najveća cifra zahteva tri binarne cifre). U posmatranom primeru:
- $3_8 \rightarrow 011_2 \quad 1_8 \rightarrow 001_2 \quad 7_8 \rightarrow 111_2$
- Ako u sumu na desnoj strani oktalne cifre zamenimo ekvivalentnim trocifrenim binarnim brojevima i smenimo $8 = 2^3$,

$$317_8 = (011)\cdot 2^6 + (001)\cdot 2^3 + (111)\cdot 2^0 =$$

$$= (0\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 1)\cdot 2^6 + (0\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1)\cdot 2^3 + (1\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 1)\cdot 2^0 =$$

$$= 0\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 =$$

$$= \underbrace{011}_{3}\underbrace{001}_{1}\underbrace{111}_{7}{}_2 = 11001111_2$$

- primetite da se iz oktalnog prelazi u binarni broj jednostavnom zamenom svake oktalne cifre ekvivalentnim trocifrenim binarnim brojem
- Uopšte nije teško izvesti sledeće pravilo:
- Ako između dva brojna sistema B_1 i B_2 postoji veza:
- $B_1 = B_2{}^n$; $n \in E$
- iz sistema sa osnovom B_1se prelazi u sistem sa osnovom B_2 tako što se svaka cifra u prvom sistemu prevede u n-to cifreni broj u sistemu B_2.
- Iz sistema sa osnovom B_2 u sistem sa osnovom B_1 tako što se levo i desno od decimalne tačke u broju sa osnovom B_2 formiraju grupe od po n cifara i zamene izračunatim vrednostima koje predstavljaju cifre u sistemu B_1

- PRIMER 6
- Prevesti binarni broj 1011010.0001_2 u oktalni i heksadekadni oblik:

$$\underbrace{1}_{1}\underbrace{011}_{3}\underbrace{010}_{2}.\underbrace{000}_{0}\underbrace{100}_{4} \rightarrow 132.04_8$$

$$\underbrace{101}_{5}\underbrace{1010}_{A}.\underbrace{0001}_{1} \rightarrow 5A.1_{16}$$

- uočavamo da oktalni i heksadekadni oblik mogu da posluže za sažeto prikazivanje binarnih brojeva

- umesto datog binarnog broja možemo skraćeno da pišemo 5A.116, što je četiri puta kraće. Binarni kod je lako reprodukovati:

$$\underbrace{5}_{0101}\overbrace{A}^{1010}\underbrace{1}_{0001} \rightarrow 1011010.0001$$

- Preostaje problem prevođenja između oktalnog i heksadekadnog sistema. Kao ideja se nameće prelaz preko binarnog sistema kao intermedijalnog.

- PRIMER 7
- Prevesti broj 5043.12_8 u heksadekadni oblik

$$5043.12_8 \rightarrow \underbrace{10110}_{A}\underbrace{0010}_{2}\underbrace{0011}_{3}.\underbrace{0010}_{2}\underbrace{1000}_{8} \rightarrow A23.28_{16}$$

Binarno kodirani dekadni brojevi

- Za razliku od prelaza iz binarnog u oktalni ili heksadekalni oblik ili kod koji je jednostavan to nije slučaj sa konverzijom između binarnog i dekadnog brojnog sistema.
- Da bi se ubrzalo binarno kodiranje pri unošenju brojeva i dekodiranje pri izlazu rezultata , u džepnim kalkulatorima i kod digitalnih instrumenata često se dekadni brojevi umesto da se prevedu u binarne samo binarno kodiraju.
- Rezultat je BCD (Bynary Coded Decimal) dekadnog broja.
- Postoji više načina kodiranja ili više BCD kodova i najpoznatiji je 8421 BCD kod.
- Analogno binarnom kodiranju oktalnih i heksadekadnih brojeva, 8421 BCD kod nekog dekadnog broja se dobija jednostavno zamenom svake od cifara u dekadnom broju četvorocifrenom binarnom vrednošću

- Primer
- Formiraj 8421 BCD kod broja 809210

$$\underbrace{8}_{1000}\overbrace{0}^{0000}\underbrace{9}_{1001}\overbrace{2}^{0010} \rightarrow 1000000010010010$$

- Primer

Dekodiraj BCD broj 10101111000

$$\overbrace{0101}^{5}\overbrace{0111}^{7}\overbrace{1000}^{8} \rightarrow 578_{10}$$

Osnovne računske operacije u pozicionom brojnom sistemu

- U pozicionom brojnom sistemu sa bilo kojom osnovom B osnovne računske radnje se obavljaju potpuno analogno kao u dekadnom brojnom sistemu (B=10)
- umesto da se manipuliše sa desetkama pri "pamćenju" i "pozajmljivanju" u toku sabiranja i oduzimanja, manipuliše se osnovom B. Uočimo analogiju kod sabiranja na sledećim primerima:

$$\begin{array}{r} 11\phantom{_{10}} \\ 586_{10} \\ +\ 175_{10} \\ \hline 761_{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11\phantom{_{8}} \\ 576_{8} \\ +\ 173_{8} \\ \hline 771_{8} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 111\phantom{_{2}} \\ 110111_{2} \\ +\ 10111_{2} \\ \hline 1001110_{2} \end{array}$$

- Jedinice iznad cifara prvog sabirka označavaju prenos (carry) iz prethodnog sabiranja.
- Pri oduzimanju u brojnom sistemu sa osnovom B≠10 ne pozajmljuje se sa prvog značajnijeg cifarskog mesta desetka, već osnova B.
- Primer:

$$
\begin{array}{r}
7\,2\,5_{16} \\
-\,3\,C\,D_{16} \\
\hline
3\,5\,8_{16}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
1101_{2} \\
-\quad 110_{2} \\
\hline
111_{2}
\end{array}
$$

- Izvršimo sledeće množenje paralelno u dekadnom i oktalnom brojnom sistemu:

$$\begin{array}{r} 46_{10} \times 37_{10} \\ \hline 322 \\ +138 \\ \hline 1702_{10} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 56_{8} \times 45_{8} \\ \hline 346 \\ +270 \\ \hline 3246_{8} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} 46_{10} = 56_{8} \\ 37_{10} = 45_{8} \end{array}$$

- Provera: $3246_8 = 3 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 6 = 1702_{10}$
- Kako smo računali: $56_8 \text{x } 5_8 = 346_8$,
- $6 \text{ x } 5 = 30 = 3 \cdot 8 + 6$ Znači 6 pišem a 3 osmice pamtim tj. prenosim 3 na rezultat sledećeg množenja:
- $5 \text{ x } 5 = 25$; $25 + 3 = 28 = 3 \cdot 8 + 4$
- Dakle, 4 pišem a 3 prenosim.

- Za računarsku aritmetiku od interesa je množenje u binarnom sistemu. Na primer:

```
   11011 x 1011
   ------------
   11011
  11011
11011
---------
100101001
```

- S obzirom da su cifre binarnog sistema 0 i 1 množenje se svodi na pravilno “potpisivanje” prvog činioca (množenje nulom znači pomeranje dva mesta ulevo) i sabiranje, drugim rečima u binarnom brojnom sistemu množenje se svodi na sabiranje.

- Deljenje u binarnom brojnom sistemu se svodi na uzastopno oduzimanje delioca.
- Uočimo to na primeru:

```
 100101001 : 11011 = 1011
-11011
   101000
  -11011
    11011
   -11011
```

Svođenje oduzimanja na sabiranje uz pomoć komplementa

- Komplement se koristi u kompjuterskoj aritmetici za koju je karakteristično da svi brojevi imaju jednaku dužinu (isti broj cifara) jer se pamte u jednakim memorijskim lokacijama.
- Poćićemo dakle od pretpostavke da svi brojevi imaju isti broj cifara, koji je uz to bar za jedan veći od broja cifara u najvećem po apsolutnoj vrednosti broja.
- Neka na primer posmatramo u dekadnom brojnom sistemu skup pozitivnih celih brojeva koji su najviše četvorocifreni. U skladu sa postavljenim uslovom sve brojeve ćemo posmatrati kao petocifrene.
- Tako će oni kao najznačajniju cifru imati nulu.
- Na primer brojeve 1280_{10} i 452_{10} ćemo posmatrati u obliku: 01280 ; 00452

- U brojnom sistemu sa osnovom B definiše se B i (B-1) komplement nekog broja.
- (B-1) komplement nekog broja se dobija kada se svaka od cifara u datom broju zameni njenom dopunom do B-1.
- Na primer 9 komplement broja 00452_{10} biće: 99547
- B komplement nekog broja, koga ćemo označavatii malim slovom c u indeksu dobija se kada se na najmanje značajnu cifru (B-1) komplementa doda jedinica.
- Na primer:
- (00452)c=99547=99548

  +1

- problem oduzimanja: 01280-00452 može rešiti
- sabiranjem 01280+(00452)c

$$\begin{array}{r} 01280 \\ -00452 \\ \hline 00828 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 01280 \\ +99548 \\ \hline 100828 \end{array}$$

- Dobijamo korektan rezultat ako ignorišemo prenos sa najznačajnijeg cifarskog mesta.

- Uopšte, važi da se oduzimanje pozitivnog broja y od pozitivnog broja x u brojnom sistemu sa osnovom B može zameniti sabiranjem broja x i komplementa broja y (uz ignorisanje konačnog prenosa).
- $x - y = x + (-y) = x + y_c$ (5)
- Odakle sledi važna relacija: $-y \rightarrow y_c$ (6)

 gde operator →znači ono na levoj strani zamenjujemo onim sa desne strane.

- Negativni brojevi se zamenjuju (prikazuju) B-komplementom odgovarajućeg pozitivnog broja
- Kao rezultat, na najznačajnijem cifarskom mestu figuriše cifra (B-1) koja tako prestavlja u stvari znak “-”.

$$-00452 \rightarrow \boxed{9}9548$$

- Rešimo sada u aritmetici sa komplementima problem:

  452-1280

- U skladu sa (5): 452 - 01280 $\rightarrow$00452 + (01280)c

(01280)c = 98719 = 98720

+ 1

$$\begin{array}{r} 00452 \\ +\underline{98720} \\ \boxed{9}9172 \end{array}$$

- Rezultat je negativan!
- Kao negativan, rezultat u stvari predstavlja komplement odgovarajućeg pozitivnog broja. Koji je to broj?

  $-y \rightarrow y_c = 99172$; $y=?$

- Ako relaciju (6) formalno primenimo na (-y):

  $-(-y) \rightarrow (-y)_c \rightarrow (y_c)_c$

- Kako je -(-y) = y, sledi: $y \rightarrow (y_c)_c$ (7)

- Dakle, ako imamo (y_c) onda broj y dobijamo kao komplement komplementa.

- U našem primeru: 99172c = 00827 = 00828

  +1

- Dakle 99172 predstavlja u stvari broj -00828 što je tačan rezultat.

- U kompjuterskoj aritmetici se koristi opisan postupak zamene oduzimanja sabiranjem tj. negativni brojevi u računaru su prikazani u obliku 2 komplementa odgovarajućih pozitivnih brojeva. Kako se radi o binarnom brojnom sistemu, znači da se sve binarne računske operacije u računaru svode na sabiranje!
- To u mnogome pojednostavljuje hardversko rešavanje aritmetičkih operacija-neophodan je samo digitalni elektronski sklop (logičko kolo) za sabiranje. Da budemo precizniji, neophodna su i jednostavna kola za komplementiranje i pomeranje svih bitova u broju za jedno mesto ulevo ili udesno (shift operacija).

PRIMER 10

- Kako izgledaju operacije

- e = a + b ;   g = a - b ;   i = e - g

u računaru gde su : $a=24_{10}$; $b=49_{10}$, ako se za pamćenje celih brojeva koriste lokacije dužine 1 bajta?

- $24_{10}= 11000_2$; $49_{10}= 110001_2$

tako će u računaru biti: a= 0 0011000;   b=0 0110001

- Nule na mestu najznačajnijeg bita govore o tome da su brojevi pozitivni.

$$\begin{array}{rr} e = a+b = & 00011000 \\ + & \underline{00110001} \\ e = & 01001001 \end{array} \qquad (e>0)$$

$g=a-b = a+b_c$ $\qquad b_c = (00110001)_c = 11001110$
$\qquad b_c = 11001111 \qquad +1$

$$\begin{array}{r} g=00011000 \\ \underline{+11001111} \\ g=11100111 \end{array} \qquad (g<0)$$

$-g=(11100111)_c = 00011000 = 00011001$
$\qquad\qquad +1$

$g=-(2^4+2^3+1) = -25_{10}$

$i = e-g = e+g_c$

$g_c=(11100111)_c = 00011000 = 00011001$
$\qquad\qquad +1$

$$\begin{array}{r} i= 01001001 \\ \underline{+00011001} \\ i= 01100010 \end{array} \qquad (i>0)$$

$i = 2^6+2^5+2 = 98_{10}$